Методика подготовки учащихся к решению задач раздела «Алгебра»: (Слайд 1)
Решение задач на движение по окружности.
Решение задач на смеси и сплавы.
Решение сложных задач на числа и их свойства. (слайд 2)

Решение задач на движение по окружности. (Слайд 3)

Эти задачи встречаются в ЕГЭ № 11 профильного уровня. Согласно спецификации, это задание проверяет умение строить и исследовать простейшие математические модели. Давайте вспомним, как решаются такие задачи.

Если два тела движутся в одном направлении по кольцевой замкнутой трассе длиной S со скоростями v_1 и v_2, $v_1 > v_2$, то в какой-то момент времени тело, движущееся с большей скоростью, оказывается как бы позади тела, которое движется с меньшей скоростью. Возникает необычная ситуация, когда тело, находящееся «впереди», как бы догоняет тело, находящееся «сзади».

Время между встречами тел, движущихся в одном направлении, вычисляется по формуле: $t = \frac{S}{v_1 - v_2}$,где $v_1 > v_2$.

Если два тела движутся в разных направлениях по кольцевой замкнутой трассе, то эта ситуация после их очередной встречи практически ничем не отличается от случая движения двух тел навстречу друг другу по прямолинейной трассе, то есть время между встречами вычисляется по формуле: $t = \frac{S}{v_1 - v_2}$, где $v_1 > v_2$.

Рассмотрим решение на конкретной задаче.

(Слайд 4)

Задача. Из одной точки круговой трассы, длина которой равна 6 км, одновременно в одном направлении стартовали два лыжника. Скорость первого лыжника равна 15 км/ч, и через 40 мин после старта он опережал второго лыжника на 1 круг. Найдите скорость второго лыжника. Ответ дайте в км/ч.

(Слайд 5) Решим задачу арифметическим способом по формуле движения тел по замкнутой траектории: $\mathrm{t} = \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{v}_1 - \mathrm{v}_2}$, где $\mathrm{v}_1 > \mathrm{v}_2$.

$\mathrm{v}_1 = 15$ км/ч, S = 6км, $\mathrm{t} = 40\text{мин} = \frac{40}{60}\text{ч} = \frac{2}{3}\text{ч}$.

$\mathrm{v}_2 = \mathrm{v}_1 - \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{t}}, \mathrm{v}_2 = 15 - \frac{6}{\frac{2}{3}} = 15 - \frac{18}{2} = 6\text{км/ч}$

Ответ: 6 км/ч.

(Слайд 6)

Задача. По двум концентрическим окружностям равномерно вращаются две точки. Одна из них совершает полный оборот на 5 с быстрее, чем другая, и поэтому успевает сделать на два оборота в минуту больше. Пусть в начале движения лучи, направленные из центра окружности к этим точкам, сливались. Вычислить величину угла между лучами через 1 с.

	t, с	***S, часть***	***v, часть/с***
1	*x*	*1*	$\frac{1}{x}$
2	*x + 5*	*1*	$\frac{1}{x+5}$

Найдем расстояние, которое пройдут точки за 1 минуту или за 60 секунд по формуле $\mathrm{S} = \mathrm{v} \cdot \mathrm{t}$.

$$\mathrm{S}_1 = \frac{60}{\mathrm{x}} > \mathrm{S}_2 = \frac{60}{\mathrm{x}+5} \text{ на 2 оборота (2 части).}$$

Получим уравнение $\frac{60}{\mathrm{x}} - \frac{60}{\mathrm{x}+5} = 2$. (Слайд 7)

$$60\mathrm{x} + 300 - 60\mathrm{x} = 2\mathrm{x}^2 + 10\mathrm{x};$$
$$\mathrm{x}^2 + 5\mathrm{x} - 150 = 0;$$
$$\mathrm{D} = 25 - 4(-150) = 625 = 25^2;$$
$$\mathrm{x}_{1,2} = \frac{-5 \pm 25}{2};\ \mathrm{x}_1 = 10;\ \mathrm{x}_2 = -15\ (\text{не удовл.})$$

Решив уравнение, получим x= 10 с. $\mathrm{v}_1 = \frac{1}{10}\text{часть/с} = \frac{360°}{10} = 36°$.

$v_2 = \frac{1}{15}$часть/с $= \frac{360°}{15} = 24°$.
В условии задачи не указано как именно двигались точки. Значит, они могли двигаться в одном направлении, а может и в противоположных, т.е. задача будет иметь два решения.
$36° - 24° = 12°$.
$36° + 24° = 60°$.
(Слайд 8). ***Решение задач на смеси и сплавы***
Эти задачи встречаются в ЕГЭ (№11) и в ОГЭ (№22).
Давайте вспомним:
Концентрацией (процентной концентрацией, процентным содержанием) вещества A в смеси (сплаве, растворе) называют число процентов ρ_A, выраженное формулой:
$\rho_A = \frac{m_A}{m} \cdot 100\%$, где m_A – масса вещества А в смеси (сплаве, растворе), а m – масса всей смеси (сплава, раствора).
Часто в задачах на растворы указаны не массы входящих в них веществ, а их объемы. В этом случае используется формула объемной концентрации вещества А в растворе:
$\rho_A = \frac{V_A}{V} \cdot 100\%$, где V_A – объем вещества А в растворе, а V – объем всего раствора.
При слиянии нескольких растворов (сплавов) масса и объем полученной смеси равны сумме масс и объемов смешиваемых компонентов.
Решим следующую задачу: (Слайд 9)
Задача. Виноград содержит 90% влаги, а изюм — 5%. Сколько килограммов винограда требуется для получения 20 килограммов изюма?
Оформим решение в таблице:

	Сухое вещество, %	Влага, %
Виноград	10%	90%
Изюм	95%	5%

1) 20 · 0,95 = 19 (кг) – сухого вещества в изюме
19 кг сухого вещества в винограде – это 10% всего винограда
2) 19 : 0,1 = 190 (кг)
Ответ: 190 кг винограда требуется взять.
(Слайд 10)

Задача. Имеется два сплава. Первый сплав содержит 10% никеля, второй – 30% никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 200 кг, содержащий 25% никеля. На сколько килограммов масса первого сплава меньше массы второго?

Рассмотрим нестандартные способы решения:

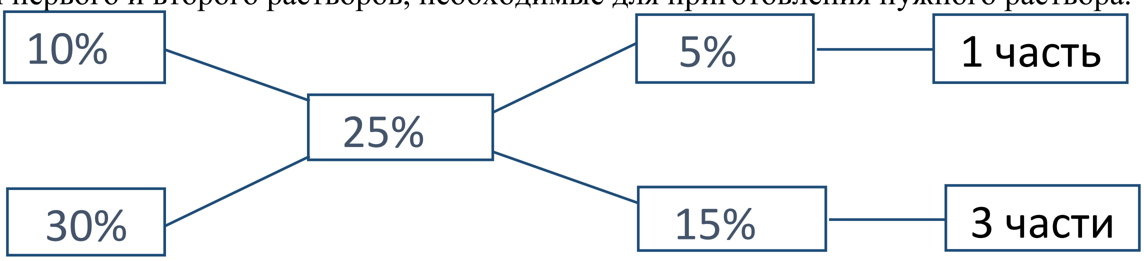
1) «Метод чаш»

Метод состоит в следующем: необходимо изобразить каждый сплав в виде геометрической фигуры, разбитой на 2 части. В каждую часть вписываем процентное содержание и массу каждого сплава. И учитывая, что масса сплава нескольких веществ равна сумме масс компонентов, составляем уравнение или систему уравнений.

$$\begin{cases} m_1 + m_2 = 200, \\ 0{,}1m_1 + 0{,}3m_2 = 0{,}25 \cdot 200. \end{cases}$$

2) «Правило креста» или «Конверт Пирсона» (Слайд 11)

Это удобный и рациональный способ решения задач. Данный способ предложил английский математик, статистик, биолог и философ Карл Пирсон. Метод состоит в следующем: при расчетах записываем одну над другой массовые доли растворенного вещества в исходных растворах, справа между ними – его массовую долю в растворе, который нужно приготовить, и вычитаем по диагонали из большего меньшее значение. Разности их вычитаний показывают массовые доли для первого и второго растворов, необходимые для приготовления нужного раствора.

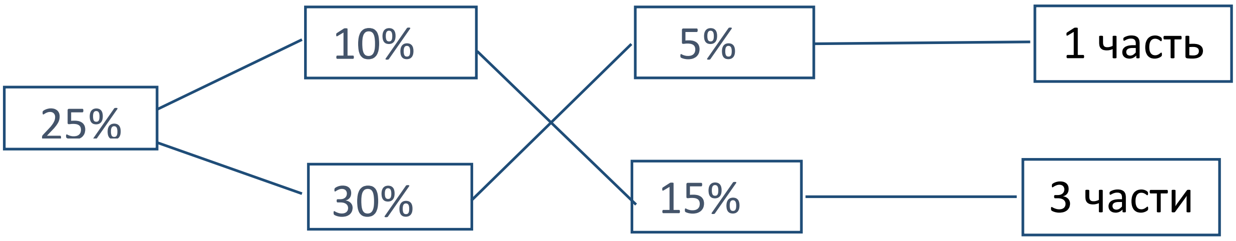


$$\frac{x}{200-x}$$

1) $200:4 = 50$(кг) $-$ 1сплав;
2) $50 \cdot 3 = 150$(кг) $-$ 2сплав;
3) $150 - 50 = 100$(кг)
Ответ: на 100 кг.

З) «Метод рыбки» (метод Магницкого) (Слайд 12)

Впервые такой способ решения задач был описан в арифметике 18 века, автором которой был замечательный русский математик и педагог Леонтий Филиппович Магницкий. При решении задач этим способом строится схема, похожая на рыбку.



$$\frac{x}{200-x}$$

Решение сложных задач на числа и их свойства (Слайд 13)

Эти задачи встречаются в профильном ЕГЭ (№19), их еще называют олимпиадными.

Согласно спецификации, чтобы решить эту задачу, нужно уметь:

- моделировать реальные ситуации на языке алгебры, составлять уравнения и неравенства по условию задачи; исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры;
- проводить доказательные рассуждения при решении задач, оценивать логическую правильность рассуждений, распознавать логически некорректные рассуждения.

Это задание содержит в себе три подзадачи. В пунктах а) и б), оцениваемых в 1 первичный балл каждый, традиционно предлагается решить несложную задачу на построение примера или строгое обоснование того, что требуемый пример построить нельзя. Пункт в), оцениваемый в 2 первичных балла, немного сложнее. Как правило, в нём требуется построение примера, обладающего в некотором смысле «экстремальными» характеристиками (например, задача на максимум или минимум выражения, принимающего дискретные значения), а также доказательство того, что именно этот пример, а не какой-то другой обладает данными характеристиками.

В учебно-методических материалах для председателей и членов региональных предметных комиссий по проверке выполнения заданий с развернутым ответом экзаменационных работ ЕГЭ 2016 года приводятся такие критерии оценки этого задания.

Содержание критерия	**Баллы**
Верно построен пример в п. *а* и обоснованно получены верные ответы в п. *б* и п. *в*	4
Обоснованно получен ответ в п. *в* и один из следующих результатов: — пример в п. *а*; — обоснованное решение п. *б*	3
Верно построен пример в п. *а* и обоснованно получен ответ в п. *б* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в п. *в*	2
Верно построен пример в п. *а* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в п. *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Рассмотрим типичные ошибки в решении этого задания, допущенные выпускниками прошлых лет (Слайд 14, 15, 16, 17)

(Слайд 18) **Задача.** а) Приведите пример четырехзначного числа, произведение цифр которого в 10 раз больше суммы цифр этого числа.

б) Существует ли такое четырехзначное число, произведение цифр которого в 175 раз больше суммы цифр этого числа?

в) Найдите все четырехзначные числа, произведение цифр которых в 50 раз больше суммы цифр этого числа.

Решение.

а) Произведение цифр числа 2529 равно 180, а сумма цифр равна 18, то есть в 10 раз меньше.

Для 1 балла достаточно привести 1 пример. Если нет, то 0 баллов. Решение должно быть обоснованное.

б) Предположим, что такое число n существует и a, b, c, d — его цифры. Заметим, что среди этих цифр не может быть нулей, так как иначе их произведение было бы равно нулю. Имеем: $abcd = 175(a + b + c + d)$. Правая часть этого равенства делится на 25, поэтому среди цифр найдутся две цифры 5. Так как при перестановке местами цифр числа n равенство $abcd = 175(a + b + c + d)$ остаётся верным, то без ограничения общности можно считать, что в числе n цифры c и d равны 5. Тогда $ab = 7(a + b + 10) \geq 7 \cdot 12 > 9 \cdot 9 \geq ab$. Получаем противоречие.

Может быть неверное или необоснованное доказательство. Может быть ошибка в оценке количества чисел, либо отсутствие этой оценки.

в) Предположим, что такое число n существует и a, b, c, d — его цифры. Как и ранее, заметим, что среди этих цифр не может быть нулей, так как иначе их произведение было бы равно нулю. Имеем: $abcd = 50(a + b + c + d)$. Правая часть этого равенства делится на 25, поэтому среди цифр найдутся две цифры 5. Без ограничения общности будем считать, что $c = d = 5$. Тогда $ab = 2(a + b + 10)$. Так как правая часть последнего равенства делится на 2, то либо a, либо b делится на 2. Будем считать, что на 2 делится b.

Если $b = 2$, то $a = a + 12$, что невозможно. Если $b = 4$, то $2a = a + 14, a = 14$, что невозможно.

Если $b = 6$, то $3a = a + 16, 2a = 16, a = 8$. Число $n = 8655$ и все числа, получаемые из него перестановкой цифр, удовлетворяют условию задачи. Если $b = 8$, то $4a = a + 18, 3a = 18, a = 6$. Этот вариант также получается из предыдущего перестановкой цифр.

Если приведены не все варианты чисел, то балл снижается до 1 балла. Если отсутствует обоснованное решение, то 0 баллов.

Ответ: а) например, 2529; б) нет; в) Число 8655 и все числа, получаемые из него перестановкой цифр (всего 12 чисел).

Разберем аналогичную задачу (Слайд 19)

Задача. а) Приведите пример четырехзначного числа, произведение цифр которого в 14 раз больше суммы цифр этого числа.

б) Существует ли такое четырехзначное число, произведение цифр которого в 210 раз больше суммы цифр этого числа?

в) Найдите все четырехзначные числа, произведение цифр которых в 49 раз больше суммы цифр этого числа.

Ответ: а) например, 2736; б) нет; в) Число 4677 и все числа, получаемые из него перестановкой цифр (всего 12 чисел).

Рассмотрим решения этой задачи выпускниками. (Слайд 20, 21, 22)

(21) а) Пусть $\overline{abcd}$ – исходное 4-знач. число Тогда

$a\cdot b\cdot c\cdot d = 14(a+b+c+d)$ $\qquad a=7, b=2$

~~$a=7, b=2 \Leftrightarrow c\cdot d = 9+c+d \Leftrightarrow c(d-1)=9+d$~~ $\qquad c(d-1)=9+d$

$d=6,\ c=3$

7263

б) Может ли ~~делиться на 210~~ быть больше в 210 раз.
Предположим, что да. Тогда

$a\cdot b\cdot c\cdot d = 210(a+b+c+d)$

$$\begin{array}{r|l} 210 & 7 \\ 30 & 2 \\ 15 & 5 \\ 3 & 3 \end{array}$$

Т.к. a,b,c,d – однозначные числа, то $0 < a,b,c,d \le 9$ и среди них должны быть делители числа 210

$7\cdot 5\cdot 6\cdot d = 7\cdot 5\cdot 6\cdot(18+d)$

Противоречие, т.к. $d \ne 18+d$, это однозначное

в) $a\cdot b\cdot c\cdot d = 49(a+b+c+d)$. Пусть $a=7, b=7$

$c\cdot d = 14+c+d$

$c(d-1)=14+d$

Рассмотрим все варианты d

$d=1$ —
$d=2$ $c=16$ –
$d=3$ $2c=17$ –
$d=4$ $3c=18 \to c=6$
$d=5$ $4c=19$ –
$d=6$ $5c=20 \to c=4$
$d=7$ $6c=21$ –
$d=8$ $7c=22$ –
$d=9$ $8c=23$ –

Получили след цифры: 7, 7, 4, 6

7746, 7764, 7476, 7467, 7647, 7674, 4776, 6774, 6747, 6477, 4767, 4677.

Ответ: а) 7263; б) нет; в) все числа из след. набора цифр (7, 7, 4, 6)

Комментарий. Задача решена и обоснования вполне достаточны
Оценка: 4 балла.

№21 $\overline{abcd}$ – число; $a \ne 0$.

а) например, число 7623 : $7\cdot 6\cdot 2\cdot 3 = 14(7+6+2+3)$.

б) $abcd = 210(a+b+c+d) \Rightarrow \frac{abcd}{210}$ – целое $\Rightarrow$

$\frac{abcd}{210} = \frac{abcd}{7\cdot 5\cdot 3\cdot 2}$. $\qquad a=7,\ b=5$, т.к. ~~abcd~~ $abcd$ кратно 5 и 7, но a,b,c,d – однозначные.

cd кратно 6.

$\Rightarrow \overline{abcd} = 7523; 7526; 7529; 7543; 7546; 7549; 7563; 7566; 7569; 7583; 7586; 7589; 7560$. Независимо от порядка цифр в числе, все они не подходят $\Rightarrow$ нет такого числа.

$7\cdot 5\cdot c\cdot d \ne 210(7+5+c+d)$.

в) $\frac{abcd}{49} = a+b+c+d \Rightarrow \frac{abcd}{49} = \frac{abcd}{7\cdot 7} \Rightarrow a=b=7$.

$cd = 14+c+d \Rightarrow c, d = 4, 6$.

$\Rightarrow \overline{abcd} = 7764; 7746; 7476; 7674; 7647; 7467; 4767; 6747; 4677; 6477$

Комментарий. Классический случай 3 баллов: всё верно, но в ответе не 12 чисел, а 10.
Оценка: 3 балла.

№ 21

б) $\overline{abcd} = 210(a+b+c+d)$

$a+b+c+d \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\overline{abcd} \,\vdots\, 210$

$a = 7$

$b = \{3; 6; 9\}$

$c = 5$

$d = \{2; 4; 6; 8\}$

$S \in [17; 29]$

$p \in [72; 864]$

$P_{max} < 210\, S_{min} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ не существует.

Комментарий. Довольно редкий случай. Что-то разумное, но в итоге неверное, есть в решении б) , а к а) и в) автор не приступал.

Оценка: 0 баллов

(Слайд 23)

Список использованной литературы:

1. Корянов, А. Г. Задача B13. ЕГЭ. Математика 2014 [Электронный ресурс] / А. Г. Корянов, Н. В. Надежкина. - Режим доступа : http://alexlarin.net/ege/2014/b132014.html
2. Корянов, А. Г. Задачи на целые числа (от учебных задач до олимпиадных) [Электронный ресурс] / А. Г. Корянов, А. А. Прокофьев. – Режим доступа : http://alexlarin.net/ege/2011/C62011.html
3. Математика. ЕГЭ 2017. Книга 1 [Текст] / Д. А. Мальцев, А. А. Мальцев, Л. И. Мальцева. – Ростов н/Д; М. : Народное образование, 2017. – 377 с.
4. Математика. ЕГЭ. Алгебра: задания с развернутым ответом : учебно - методическое пособие [Текст] / Под ред. Ф. Ф Лысенко, С. Ю. Кулабухова. – Ростов н/Д : Легион, 2016. – 368 с.
5. http://fipi.ru/
6. Сборник задач по математике для поступающих во втузы [Текст] / В. К. Егерев, В. В. Зайцев, Б. А. Кордемский и др.; Под ред. М. И. Сканави. – М. : ООО «Издательство «Мир и Образование»: ООО «Издательство «ОНИКС-ЛИТ», 2013. – 608.
7. Ященко, И. В. Методические рекомендации для учителей, подготовленные на основе анализа типичных ошибок участников ЕГЭ 2016 года по математике [Электронный ресурс] / И. В. Ященко, А. В. Семенов, И. Р. Высоцкий. – Режим доступа : http://www.fipi.ru/sites/default/files/document/1476454097/matematika.pdf